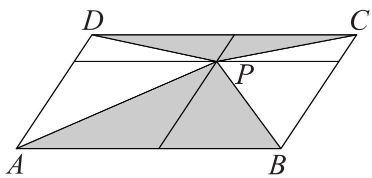
Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2019

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

12. Klasse / 12. Schulstufe

1. Im Inneren eines Parallelogramms *ABCD* liegt der Punkt *P*. Die Strecken *PA*, *PB*, *PC* und *PD* zerlegen das Parallelogramm in die Dreiecke ΔABP, ΔBCP, ΔCDP und ΔDAP. Drei dieser Dreiecke haben die Flächeninhalte 10 cm², 11 cm² und 12 cm² (in beliebiger Reihenfolge).
Die Frage: Wie viele cm² kann der Flächeninhalt des vierten Dreiecks betragen?

(A) *9* **(B)** *10* **(C)** *11* **(D)** *12* **(E)** *13*



Lösung: In **Teil 1** formulieren wir eine Behauptung und beweisen sie.
<u>Behauptung</u>: $A_{ABP} + A_{CDP} = A_{ADP} + A_{BCP}$
<u>Beweis</u>: Durch *P* zeichnen wir Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms. So entstehen vier kleinere Parallelogramme. *PA*, *PB*, *PC* und *PD* sind Diagonalen in diesen Parallelogrammen und halbieren sie. Es entstehen also stets zwei gleich große Dreiecke, je ein weißes und je ein graues Dreieck. Daraus folgt, dass in der Figur die Summe der weißen Flächen und die Summe der grauen Flächen gleich groß ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.
In **Teil 2** ermitteln wir den gesuchten Flächeninhalt. Dazu bezeichnen wir ihn zunächst mit x. Es gibt drei Fälle:
<u>1. Fall</u>: $x + 12 = 10 + 11$. Daraus folgt $x =$ **9**.
<u>2. Fall</u>: $x + 11 = 10 + 12$. Daraus folgt $x =$ **11**.
<u>3. Fall</u>: $x + 10 = 11 + 12$. Daraus folgt $x =$ **13**.
In **Teil 3** beschäftigen wir uns mit der Frage, ob die im Teil 2 rechnerisch ermittelten Lösungen auch zeichnerisch möglich sind. Im *1. Schritt* stellen wir Formeln für die Flächeninhalte der Dreiecke auf.

$$A_{CDP} = \frac{\overline{CD} \cdot h_{CD}}{2},\ A_{BCP} = \frac{\overline{BC} \cdot h_{BC}}{2},\ A_{ADP} = \frac{\overline{AD} \cdot h_{AD}}{2},\ A_{ABP} = \frac{\overline{AB} \cdot h_{AB}}{2}$$

Im *2. Schritt* geben wir ein Zahlenbeispiel für den 1. Fall. Es sei $\overline{AB} = \overline{DC} =$ 6 cm, $\overline{AD} = \overline{BC}$ = 10 cm, h_{AB} = 4 cm, h_{CD} = 3 cm, h_{AD} = 2,2 cm und h_{BC} = 2 cm.
Im *3. Schritt* führen wir die Probe durch.

$A_{CDP} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$, $A_{BCP} = \dfrac{10 \cdot 2}{2} = 10$, $A_{ADP} = \dfrac{10 \cdot 2{,}2}{2} = 11$, $A_{ABP} = \dfrac{6 \cdot 4}{2} =$ 12 und es stimmt.

<u>Beachte</u>: Es gibt unendlich viele Parallelogramme mit $\overline{AB} = \overline{DC} = 6$ cm, $\overline{AD} = \overline{BC} = 10$ cm. Man kann aber den Winkel $\sphericalangle DAB$ so bestimmen, dass gilt: $h_{AB} = 4$ cm, $h_{CD} = 3$ cm, $h_{AD} = 2{,}2$ cm und $h_{BC} = 2$ cm.

<u>1. Anregung</u>: Der geneigte Leser möge dies durch eine geeignete Skizze prüfen.
<u>2. Anregung</u>: Der geneigte Leser möge den 2. und 3. Fall selbst untersuchen.

(A) 52% **(B)** 17% **(C) 56%** **(D)** 19% **(E) 50%**

12. Einige Steine wurden in einer geraden Reihe aufgestellt. Jeder Stein ist entweder rot oder grün (und es gibt sowohl rote als auch grüne Steine). Wenn zwischen zwei Steinen 6 oder 9 andere Steine stehen, dann haben diese zwei Steine dieselbe Farbe.
Die Frage: Wie viele Steine können sich in der Reihe befinden?

(A) *13* **(B)** *14* **(C)** *15* **(D)** *16* **(E)** *17*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein. Die Steine werden durchnummeriert: 1, 2, 3, …. Ferner werden die grünen Steine *kursiv* dargestellt, die roten <u>unterstrichen</u>.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **15** eine Lösung ist. Dazu geben wir ein passendes Beipiel an:
$\underline{1}$, $\underline{2}$, *3*, $\underline{4}$, $\underline{5}$, *6*, $\underline{7}$, $\underline{8}$, $\underline{9}$, *10*, $\underline{11}$, $\underline{12}$, *13*, $\underline{14}$, $\underline{15}$
Beide Bedingungen I. und II. sind erfüllt. 1. Stichprobe: Zwischen *3* und *10* gibt es genau 6 Steine. *3* und *10* sind beide grün. 2. Stichprobe: Zwischen $\underline{5}$ und $\underline{15}$ gibt es genau 9 Steine. $\underline{5}$ und $\underline{15}$ sind beide rot.
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge weitere Proben durchführen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **14** eine Lösung ist. Dazu reicht es, wenn wir im Beipiel von Teil 2 die $\underline{15}$ weglassen:
$\underline{1}$, $\underline{2}$, *3*, $\underline{4}$, $\underline{5}$, *6*, $\underline{7}$, $\underline{8}$, $\underline{9}$, *10*, $\underline{11}$, $\underline{12}$, *13*, $\underline{14}$
In **Teil 4** zeigen wir, dass **13** eine Lösung ist. Dazu reicht es, wenn wir im Beipiel von Teil 3 die $\underline{14}$ weglassen:
$\underline{1}$, $\underline{2}$, *3*, $\underline{4}$, $\underline{5}$, *6*, $\underline{7}$, $\underline{8}$, $\underline{9}$, *10*, $\underline{11}$, $\underline{12}$, *13*
In **Teil 5** zeigen wir, dass **12** eine Lösung ist. Dazu reicht es, wenn wir im Beipiel von Teil 4 die *13* weglassen:
$\underline{1}$, $\underline{2}$, *3*, $\underline{4}$, $\underline{5}$, *6*, $\underline{7}$, $\underline{8}$, $\underline{9}$, *10*, $\underline{11}$, $\underline{12}$
In **Teil 6** zeigen wir, dass 16 <u>keine</u> Lösung ist. Wir untersuchen was es bedeutete, wenn es 16 Steine gäbe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Die Farben wurden noch nicht festgelegt. Aus I. und II. folgt:
<u>1. Feststellung</u>: Die Paare (1, 8), (8, 15), (15, 5), (5, 12), (12, 2), (2, 9), (9, 16), (16, 6), (6, 13), (13, 3), (3, 10) hätten dieselbe Farbe.
<u>2. Feststellung</u>: Die Paare (1, 11), (11, 4), (4, 14), (14, 7) hätten ebenfalls dieselbe Farbe.

3. Feststellung: Wenn zwei Paare eine gemeinsame Zahl haben, dann haben alle Zahlen aus diesen zwei Paaren dieselbe Farbe. Beispiel 1: (1, 8) und (8, 15). Es gilt: 1, 8 und 15 hätten dieselbe Farbe. Beispiel 2: (1, 8), (1, 11). Es gilt: 1, 8 und 11 hätten dieselbe Farbe.
Aus den Feststellungen folgt:
Die Steine 1, 8, 15, 5, 12, 2, 9, 16, 6, 13, 3, 10, 11, 4, 14, 7 hätten alle dieselbe Farbe. Dies wären aber alle 16 Steine. Dies bedeutet: Alle Steine hätten dieselbe Farbe. Dies geht jedoch nicht, da es sowohl rote als auch grüne Steine geben muss. Damit ist bewiesen, dass 16 keine Lösung ist.
Beachte: Da 16 keine Lösung ist, stellt 17 ebenfalls keine Lösung dar.

(A) 53% **(B) 53%** **(C) 48%** **(D)** 23% **(E)** 20%