„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2015

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 11

4. An einem runden Tisch sitzen Ehrliche (die stets die Wahrheit sagen) und Lügner (die stets lügen). Die Frage „Ist dein rechter Tischnachbar ein Ehrlicher?” wurde von allen mit „nein” beantwortet. Daraufhin wurden zwei benachbarte Menschen danach gefragt, wie viele Leute am Tisch säßen. Der eine antwortete 13, der andere 14.

Die Frage: Wie viele Menschen können am runden Tisch gesessen haben?

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *14* **(D)** *15*

(E) *Man kann es nicht wissen.*

Lösung: Im *1. Schritt* formulieren wir aus den Angaben der Aufgabe zwei Bedingungen.

<u>Erste Bedingung</u>: Die Frage “Ist dein rechter Tischnachbar ein Ehrlicher?“ wurde von allen mit „nein“ beantwortet.

Daraufhin wurden zwei benachbarte Menschen danach gefragt, wie viele Leute am Tisch säßen.

<u>Zweite Bedingung:</u> Der eine antwortete 13, der andere 14.

Im *2. Schritt* zeigen wir: Wenn die erste Bedingung erfüllt ist, dann ist die Anzahl der Menschen, die am runden Tisch sitzen, eine gerade Zahl. Dazu beweisen wir zuerst Folgendes:

<u>Behauptung</u>: Wenn die erste Bedingung erfüllt ist, dann müssen am Tisch abwechselnd Ehrliche und Lügner sitzen. Begründung: Wenn beide Nachbarn Ehrliche wären oder beide Lügner wären, müsste derjenige, der links vom anderen sitzt, die Frage aus der ersten Bedingung mit „ja“ beantworten.

Wenn nun die Anzahl der Menschen, die am runden Tisch sitzen, ungerade wäre und wenn die erste Person z. B. ein Lügner wäre, dann wäre ihr rechter Nachbar ein Ehrlicher, deren rechter Nachbar ein Lügner usw. Die letzte Person in dieser Kette, d.h. der linke Nachbar der ersten Person, wäre ebenso ein Lügner. Somit wären zwei Lügner Nachbarn, was aber wegen der Behauptung <u>nicht</u> geht.

<u>Beachte</u>: Aus dem Ergebnis des 2. Schrittes folgt, dass 13 und 15 <u>nicht</u> gehen.

Im *3. Schritt* zeigen wir, dass **14** eine korrekte Antwort ist und zwar, wenn die 14 Menschen so am Tisch sitzen, dass Ehrliche und Lügner abwechselnd aufeinanderfolgen. Von zwei Nachbarn ist damit der eine stets ein Ehrlicher, der andere stets ein Lügner. Die *erste Bedingung ist erfüllt*, die Frage “Ist dein rechter Tischnachbar ein Ehrlicher?“ wird in diesem Fall von allen mit „nein“

beantwortet. Begründung: Wenn der Gefragte ein Ehrlicher ist, dann ist sein rechter Nachbar ein Lügner. Der Ehrliche sagt die Wahrheit und antwortet daher mit „nein". Wenn der Gefragte ein Lügner ist, dann ist sein rechter Nachbar ein Ehrlicher. Der Lügner lügt und antwortet daher auch mit „nein". Die *zweite Bedingung ist erfüllt.* Begründung: Der Lügner beantwortet die Frage zur zweiten Bedingung mit 13, der Ehrliche mit 14.
Im *4. Schritt* zeigen wir, dass 12 keine mögliche Antwort ist. Tatsächlich: Wenn genau 12 Menschen am Tisch säßen, dann müssten Ehrliche und Lügner abwechselnd aufeinanderfolgen. Von zwei Nachbarn wäre damit der eine stets ein Ehrlicher, der andere stets ein Lügner. Der Ehrliche würde jedoch die Frage zur zweiten Bedingung mit 12 und nicht mit 14 beantworten.
Beachte: Die gerade Anzahl der am Tisch sitzenden Menschen ist nur eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für eine korrekte Lösung.

(A) 5% **(B)** 12% **(C) 86%** **(D)** 5% **(E)** 12%

12. Eine Uhr hat die merkwürdige Eigenschaft, dass der Stundenzeiger und der Minutenzeiger gleich aussehen. Ansonsten ist sie wie eine ganz normale kreisförmige Armbanduhr mit den Ziffern 1 bis 12.
Die Frage: Wie viele verschiedene Lagen haben die zwei Zeiger, für die sich die genaue Zeit nicht bestimmen lässt?

(A) *12* **(B)** *24* **(C)** *mindestens 60* **(D)** *132* **(E)** *144*

Lösung: Wir schildern mehrere Lösungswege.
1. Lösungsweg: Wir zerlegen die Kreisfläche der Uhr in 12 gleich große Sektoren. Nun betrachten wir eine solche Lage der Zeiger, um die es in der Aufgabe geht und bezeichnen mit x die Lage des einen Zeigers, mit y die Lage des anderen Zeigers. Wegen der 12 Sektoren ist $0 \leq x < 12$, $0 \leq y < 12$.
Beachte: Bei 0 ist „=" möglich, bei 12 nicht. So verhindern wir, dass dieselbe Lage durch zwei unterschiedliche Zahlen beschrieben wird (0 und 12).
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: Die Lage des Stundenzeigers sei x, die Lage des Minutenzeigers sei y. Da der Minutenzeiger 12mal schneller geht als der Stundenzeiger, gilt:

$$x = a + \frac{y}{12} \quad (0 \leq a \leq 11)$$

2. Fall: Die Lage des Stundenzeigers sei y, die Lage des Minutenzeigers sei x. Da der Stundenzeiger 12mal langsamer geht als der Minutenzeiger, es gilt:

$y = b + \frac{x}{12}$, wobei b eine natürliche Zahl ist mit $0 \leq b \leq 11$.

Beachte: Die Aufgabe zu lösen bedeutet die Anzahl der Zahlenpaare $(x; y)$ zu finden, die beide der obigen *zwei* Gleichungen (1. und 2. Fall) *gleichzeitig* erfüllen.
Nach Multiplikation mit 12 sehen diese Gleichungen so aus:

$$\left.\begin{array}{l}12x = 12a + y\\ 12y = 12b + x\end{array}\right\}$$

Oder, nach weiteren Umformungen:

$$\left.\begin{array}{l}12x - 12a = y\\ 12y - 12b = x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x = 12 \cdot \dfrac{b + 12a}{143}\\ y = 12 \cdot \dfrac{a + 12b}{143}\end{array}\right\}$$

Da a und b voneinander unabhängig 12 Werte annehmen können (von 0 bis 11), hat das Gleichungssystem insgesamt $12 \cdot 12 = 144$ Lösungen.

Beachte: Die Fälle $a = b$, also $x = y$ müssen wir außer Acht lassen, denn wenn die Zeiger dieselbe Lage haben, können wir die Zeit eindeutig ablesen. Von den 144 Lösungen müssen wir daher 12 verwerfen. Es bleiben somit **132** Lagen der Zeiger, für die sich die genaue Zeit nicht bestimmen lässt.

2. Lösungsweg: Wir geben die Lage *y* des Minutenzeigers in Abhängigkeit der Lage *x* des Stundenzeigers an. Es gilt:

$y = 12x - \mathrm{a}$, wobei a eine ganze Zahl zwischen 0 und 11 ist, $0 \leq a \leq 11$.

Tatsächlich, wenn wir die Gleichung $x = a + \dfrac{y}{12}$ aus dem 2. Lösungsweg (1. Fall) nach *y* auflösen, erhalten wir die obige Gleichung.

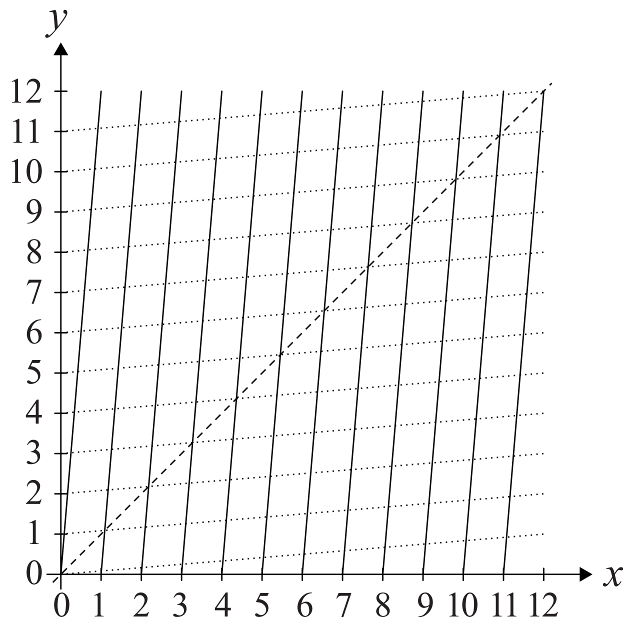
Erklärung in der Figur: Für jeden der 12 a-Werte erhalten wir je eine Strecke, die mit durchgezogener Linie eingezeichnet ist.

Wir drehen nun die Koordinatenachsen um 90° und zeichnen ähnlich auch $x = a + \dfrac{y}{12}$. Erklärung in der Figur: Für jeden der 12 a-Werte erhalten wir je eine Strecke, die mit punktierter Linie eingezeichnet ist.

Die Aufgabe zu lösen bedeutet die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den durchgezogenen und den punktierten Linien zu ermitteln.

Beachte: Die Schnittpunkte auf der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$) müssen wir verwerfen.

Ein direktes Zusammenzählen ergibt: Unterhalb der 1. Winkelhalbierenden gibt es $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66$ Schnittpunkte, oberhalb der 1. Winkelhalbierenden wegen Symmetrie ebenso 66 Schnittpunkte. Insgesamt gibt es also **132** Schnittpunkte. Die gesuchte Anzahl der Lagen der Zeiger ist somit auch **132**.



3. Lösungsweg: Wir stellen uns rechts von der Uhr aus der Aufgabe eine *zweite Uhr* vor (ab jetzt rechte Uhr genannt), die genau 12mal schneller geht als die ursprüngliche Uhr (ab jetzt linke Uhr genannt). Wir starten nun beide Uhren gleichzeitig um 12.00 Uhr.

1. Feststellung: Bei der rechten Uhr geht der Stundenzeiger genauso schnell wie bei der linken Uhr der Minutenzeiger.

Die Aufgabe zu lösen bedeutet die Anzahl der Situationen zu ermitteln, bei denen der Stundenzeiger auf der linken Uhr dieselbe Lage hat wie der Minutenzeiger der rechten Uhr. Begründung: In diesen Fällen lässt sich die genaue Zeit nicht bestimmen. Zuerst konzentrieren wir uns nur auf den Stundenzeiger der linken Uhr und auf den Minutenzeiger der rechten Uhr.

2. Feststellung: Bis der Stundenzeiger auf der linken Uhr eine volle Umdrehung macht, schafft der Minutenzeiger auf der rechten Uhr genau 144 volle Umdrehungen. Bei allen 144 Umdrehungen kommt es genau einmal vor, dass die zwei Zeiger dieselbe Lage haben. 12mal haben alle vier Zeiger dieselbe Lage. In diesen 12 Fällen lässt sich die Zeit eindeutig bestimmen.

Von 144 müssen wir daher 12 abziehen: 144 – 12 = **132**.

Beachte: „mindestens 60“ ist auch richtig, denn 60 < 132.

(A) 19% **(B)** 19% **(C) 52%** **(D) 17%** **(E)** 10%