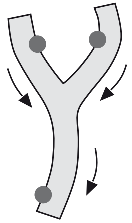
10. Ein Fluss hat zwei Nebenzweige, die in einen Hauptzweig münden. Es gibt drei Häfen: Zwei je ein km entfernt oberhalb vom Treffpunkt der zwei Nebenzweige und einen anderen 2 km entfernt unterhalb vom Treffpunkt. Die Pfeile zeigen, in welche Richtung das Wasser fließt. Ein Boot startet von einem der Häfen (erster Hafen genannt), braucht 30 Minuten bis zum zweiten Hafen und anschließend 18 Minuten bis zum dritten Hafen. Sowohl das Wasser als auch das Boot haben konstante Geschwindigkeiten.



Die Frage: Wie viele Minuten braucht das Boot, um vom dritten Hafen zum ersten Hafen zu gelangen?

Lösungshinweis: Es ist nicht bekannt, von welchem Hafen aus das Boot startete und in welchem Hafen es zuerst ankam.

(A) *12* **(B)** *24* **(C)** *36* **(D)** *60* **(E)** *72*

11. Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, … , 99, 100 wurden zehn gestrichen. Anschließend wählen wir aus den übriggebliebenen Zahlen welche so aus, dass (bei ungeänderter Reihenfolge) die Differenz zweier benachbarter Zahlen konstant ist. Man will sich über die Anzahl der ausgewählten Zahlen sicher sein, unabhängig davon, welche zehn Zahlen ursprünglich gestrichen wurden. Welche Anzahlen sind dann möglich?

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

12. Wir betrachten die Zahlen 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 15 . H sei eine Gruppe aus einigen dieser Zahlen mit der Eigenschaft: Das Produkt dreier Zahlen aus H ergibt als Ergebnis nie eine Quadratzahl. **Die Frage:** Wie viele unterschiedliche Zahlen kann H enthalten?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

13. Obelix zeichnete im Gitternetz gleichschenklige Dreiecke. Genau eine Seite liegt entlang einer Gitternetzlinie und alle Eckpunkte sind Gitternetzpunkte. Jedes Dreieck hat als Flächeninhalt 10 Kästchen.

Die Frage: Wie viele Dreiecke kann Obelix gezeichnet haben?

Lösungshinweis: Wenn zwei Dreiecke deckungsgleich sind, so werden sie nicht doppelt gezählt.

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Zeichnet einen Kreis mit dem Mittelpunkt O! Euer Auftrag besteht darin, vier Punkte der Kreislinie nur mit Hilfe des Zirkels so zu konstruieren, dass ein Quadrat entsteht.

Lösungshinweis: Eine Konstruktionsbeschreibung ist erforderlich.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Thomas Freund

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2015

1. RUNDE

KLASSE 12

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Thomas Freund
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Andreas Nagy-Baló, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Attila Furdek, *Mathematiklehrer*

Lektor der Übersetzung:
Matthias Benkeser, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Rita Furdek, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Gregor Tassy, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X.
Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Alle Seiten eines Vielecks sollen durch eine einzige geschickt gewählte Gerade geschnitten werden. Wie viele Seiten kann ein solches Vieleck haben?

(A) *4* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *77* **(E)** *2014*

Lösungshinweis: Die Innenwinkel des Vielecks können auch stumpfe und überstumpfe Winkel sein.

2. Ein unerfahrener Sultan sucht sich Ehefrauen für seinen Harem. Es melden sich 100 wunderschöne Frauen. 100 Ehefrauen sind aber doch zu viel! Der Sultan möchte also einige Frauen so auswählen, dass er dabei die anderen nicht verletzt. Er bespricht sich mit seinem weisen Kadi, woraus sich folgende Vorgehensweise ergibt:

Die 100 Frauen werden in 100 aufeinanderfolgende Zimmer eingesperrt. Die Schlösser sind so gebaut, dass sie sich durch eine Drehung öffnen und durch die nächste Drehung wieder schließen (und so weiter).

Nachdem die Frauen alle eingesperrt in ihren Zimmern sitzen, schickt der Sultan einen Wachmann los, der jedes Schloss dreht. Danach schickt er einen zweiten Wachmann los, der jedes zweite Schloss dreht. Nachher folgt ein dritter Wachmann, der jedes dritte Schloss dreht usw. Der hundertste Wachmann dreht schließlich nur das hundertste Schloss. Der Sultan nimmt nur jene Frauen in seinen Harem auf, deren Tür jetzt offen ist.

Die Frage: Wie viele Frauen sind es?

(A) *1* **(B)** *4* **(C)** *10* **(D)** *16* **(E)** *50*

3. In der Mogel-Wechselbude hat man nur zwei Möglichkeiten. I. Man wechselt 2 € und bekommt dafür 3 Dollar und ein Bonbon. II. Man wechselt 5 Dollar und bekommt dafür 3 € und ein Bonbon. Asterix kam nur mit Dollar in die Wechselbude und verließ sie – nach mehrfachen Wechselaktionen – mit 50 Bonbons und mit weniger Dollar als er ursprünglich hatte. Euro hatte er am Ende keine.

Die Frage: Wie viele Dollar zahlte Asterix für die 50 Bonbons?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *10* **(D)** *25* **(E)** *50*

4. Ein zylinderförmiger Behälter steht auf seiner Grundfläche. Der Durchmesser der Grundfläche ist 4,8 m.

Die Frage: Wie hoch steht im Behälter 110 m^3 Flüssigkeit?

(A) *5 m* **(B)** *6 m* **(C)** *mehr als 6 m* **(D)** *weniger als 6 m* **(E)** *7 m*

5. Bei einem gleichschenkligen Trapez sind die parallelen Seiten 16 cm und 4 cm lang. Das Trapez besitzt sowohl einen Umkreis als auch einen Inkreis.

Die Frage: Wie groß ist der Inkreisradius?

(A) *3 cm* **(B)** *4 cm* **(C)** *5 cm* **(D)** *6 cm* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

6. Welche Werte kann x annehmen, wenn folgende Ungleichungen alle gültig sind:

$$\begin{aligned} x - y &\le z + 2; \\ 2y + 2z &\le x - 1; \\ 4 - y &\le z + x. \end{aligned}$$

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

7. Wir zeichnen auf kariertes Papier ein 8×8 Quadrat. Dieses wird nun so in Rechtecke zerlegt, dass diejenigen Rechtecke, die in Form und Größe übereinstimmen, sich nicht berühren (nicht einmal an den Eckpunkten). **Die Frage:** Wie viele Rechtecke können entstehen?

Lösungshinweis: Das Quadrat darf nur entlang der Gitternetzlinien zerlegt werden.

(A) *24* **(B)** *30* **(C)** *35* **(D)** *39* **(E)** *45*

8. Eine Leiter ist um $2\frac{2}{3}$ m kürzer als die Höhe der Wand. Die Leiter wird nun so an die Wand gelehnt, dass ihr Fuß von der Wand $\frac{3}{5}$ der Länge der Leiter entfernt ist. Das obere Ende der Leiter reicht bis zu $\frac{2}{5}$ der Höhe der Wand.

Die Frage: Wie lang kann diese Leiter sein?

(A) *160 cm* **(B)** *mehr als 250 cm* **(C)** *mehr als 270 cm*
(D) *weniger als 300 cm* **(E)** *533 cm*

9. Welchen Wert kann der Term

$\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_9 11 \cdot \ldots \cdot \log_{2013} 2015 \cdot \log_{2015} 3$

annehmen?

(A) *1* **(B)** *10* **(C)** *weniger als 100* **(D)** *$\log_3 2015$* **(E)** *mehr als 100*

Achtung! Aufgaben 10–14 folgen auf der nächsten Seite!